ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR L'EMPLOI D'ÉLÈVE ATTACHÉ

et

CONCOURS D'ENTRÉE À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

(Division des cadres de gestion statistique)

Juin 1986 — Option A

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. :

1° Les trois parties sont indépendantes. Néanmoins les parties II et III utilisent l'inégalité (5).

2° Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$. L'intervalle $[0, 1]$ sera désigné par I.

Φ désigne une application continue, positive ou nulle, de I dans $\mathbb{R}$.

f et g sont des applications positives ou nulles, intégrables au sens de Riemann, de I dans $\mathbb{R}$.

NOTE : la notion de fonction intégrable au sens de Riemann n'est plus au programme. Circonstances AGGRAVANTES:
-ce problème la fait intervenir dès la première question
-et de façon non triviale.

PARTIE I

Φ et f étant choisies, on définit une application F de I dans $\mathbb{R}$ en posant, si $x \in I$,

$$(1) \qquad F(x) = \int_0^1 f(tx)\, \Phi(t)\, dt.$$

1° Montrer que F est bornée, qu'elle est continue sur $]0, 1]$ et qu'elle est intégrable au sens de Riemann sur I.

Montrer que si f est croissante (au sens large) sur I, F l'est également; énoncer un résultat analogue lorsque f est décroissante sur I.

2° On suppose dans cette question f continue en 0. Montrer que F est également continue en 0.

3° On suppose dans cette seule question que :

$$\forall\, t \in I, \quad \Phi(t) = 1;$$
$$f(t) = \cos t \quad \text{si} \quad t \in]0, 1]; \quad f(0) = 0.$$

Déterminer F. Que remarque-t-on ?

4° Établir à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz la relation :

$$\forall\, t \in]0, 1], \qquad \left[\int_0^1 f(tx)\, g(x)\, dx\right]^2 \leqslant \frac{1}{t} \int_0^1 f^2(x)\, dx. \int_0^1 g^2(x)\, dx.$$

5° Montrer les deux relations :

$$(2) \qquad \left[\int_0^1 F(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\, dx. \int_0^1 g^2(x)\, dx. \left[\int_0^1 \frac{\Phi(t)\, dt}{\sqrt{t}}\right]^2;$$

$$(3) \qquad \int_0^1 F^2(x)\, dx \leqslant \int_0^1 f^2(x)\, dx. \left[\int_0^1 \frac{\Phi(t)\, dt}{\sqrt{t}}\right]^2.$$

On pourra, pour établir l'inégalité (2), faire intervenir une intégrale double sur un domaine à préciser.

Tournez la page S. V. P.

Ecole Nat. de la Stat. et de l'Adm. Economique 1986 Page 97-4
Concours M.Math 2

6° Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$; on note v_p, $p = 1, 2, \ldots n$, des réels tels que $v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \ldots \geqslant v_n \geqslant 0$. On définit sur I une fonction en escalier f en posant :

$$f(t) = \begin{cases} v_1 \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ v_p \text{ si } \dfrac{p-1}{n} < t \leqslant \dfrac{p}{n}, \quad p = 2, 3, \ldots n. \end{cases}$$

Φ est une fonction continue positive ou nulle, définie sur I. F désigne la fonction définie par la relation (1) à partir de f et de Φ. Montrer que :

$$\forall\, p,\ p = 1, 2, \ldots n, \qquad \mathrm{F}\left(\frac{p}{n}\right) = \sum_{q=1}^{p} v_q \int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} \Phi(t)\, dt.$$

En déduire l'inégalité :

$$(4) \qquad \int_0^1 \mathrm{F}^2(x)\, dx \geqslant \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \left[\sum_{q=1}^{p} v_q \int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} \Phi(t)\, dt \right]^2.$$

7° Déduire des questions 5° et 6° l'inégalité :

$$(5) \qquad \sum_{p=1}^{n} \left[\sum_{q=1}^{p} v_q \int_{\frac{q-1}{p}}^{\frac{q}{p}} \Phi(t)\, dt \right]^2 \leqslant \left[\int_0^1 \frac{\Phi(t)\, dt}{\sqrt{t}} \right]^2 \cdot \sum_{q=1}^{n} v_q^2.$$

Partie II

Soit u_p, $p = 1, 2, \ldots$ une suite de réels; soit w_p, $p = 1, 2, \ldots$ la suite définie par la relation :

$$w_p = \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{p} u_q.$$

1° Montrer l'inégalité :

$$(6) \qquad \sum_{p=1}^{n} w_p^2 \leqslant 4 \sum_{p=1}^{n} u_p^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Pour cela, on pourra procéder comme suit :

a. Démontrer d'abord (6) en supposant la suite u_p décroissante (au sens large) et à termes positifs ou nuls. On utilisera I.7°.

b. Montrer ensuite (6) en supposant seulement $u_p \geqslant 0$, $p = 1, 2, \ldots$. On introduira à cet effet, pour n donné, $n \geqslant 2$, les n réels v_1, v_2, $\ldots$ v_n, définis par :

$v_1 = u_{\sigma(1)} = \sup \{ u_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n \}$;
$v_2 = u_{\sigma(2)} = \sup \{ u_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } i \neq \sigma(1) \}$;
$v_3 = u_{\sigma(3)} = \sup \{ u_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq \sigma(1) \text{ et } i \neq \sigma(2) \}$, etc.

σ désigne une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

c. Démontrer enfin (6) pour une suite quelconque.

2° Montrer que si la série de terme général u_n^2 est convergente, il en est de même de la série w_n^2.

3° On définit une suite x_n en posant :

$$x_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2 - \frac{1}{4n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Étudier le signe de x_n et la convergence de la série de terme général x_n.

4° Soit n_0 un entier fixé ($n_0 \geqslant 2$). Soient a_n, b_n, les suites définies par les relations :

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant n_0 \\ 0 & \text{si } n > n_0, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} a_p.$$

Déterminer explicitement les valeurs prises par b_n. Déterminer un réel α strictement positif, indépendant de n_0, tel que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 + \alpha.$$

Montrer que pour tout réel ε ($\varepsilon > 0$), il existe un entier n_0 tel que, pour cet entier n_0, on ait l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \geqslant \frac{4\alpha}{\varepsilon}.$$

5° Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites de réels u_n, $n = 1, 2, \ldots$ telles que la série de terme général u_n^2 converge. $\mathcal{U}^*$ désigne l'ensemble des suites non nulles de $\mathcal{U}$. À toute suite de $\mathcal{U}^*$, notée ici u, on associe le réel :

$$A(u) = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} w_n^2}{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2}$$

$\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des réels $A(u)$ lorsque u décrit $\mathcal{U}^*$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est majoré ; quelle est la borne supérieure de $\mathcal{A}$?

Partie III

Soit u_n, $n = 1, 2, \ldots$ une suite *décroissante* (au sens large) de réels *positifs ou nuls*; soit z_n, $n = 1, 2, \ldots$ la suite définie par la relation :

$$z_n = \frac{1}{n^2} \sum_{q=1}^{n} \left(q - \frac{1}{2}\right) u_q.$$

1° À l'aide de la partie I, montrer que :

$$\sum_{p=1}^{n} z_p^2 \leqslant \frac{4}{9} \sum_{p=1}^{n} u_p^2, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

2° Montrer que si la série de terme général u_n^2 est convergente, il en est de même de la série z_n^2.

3° Soit y_n la suite définie par la relation :

$$y_n = \left(6\, n\, \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{2\, n - 1}\right)^2 - \frac{9}{4\, n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Étudier le signe de y_n et la convergence de la série de terme général y_n.

4° Soit n_0 un entier *fixé* ($n_0 \geqslant$). Soient c_n, d_n les suites définies par les relations :

$$c_n = \begin{cases} 6\, n\, \dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{2\, n - 1} & \text{si } 1 \leqslant n \leqslant n_0, \\ 0 \text{ si } n > n_0, \end{cases}$$

$$d_n = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{n} \left(p - \frac{1}{2}\right) c_p.$$

Montrer que :

$$\forall\, n = 1, 2, \ldots \qquad c_n \geqslant c_{n+1} \geqslant 0,$$

et, pour $1 \leqslant n \leqslant n_0$, $\qquad d_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Montrer qu'il existe un réel β strictement positif, indépendant de n_0, tel que, pour tout entier n_0, on ait l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \leqslant \frac{9}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2 + \beta.$$

5° On note $\mathcal{U}'$ l'ensemble des suites de réels, $n = 1, 2, \ldots$, à termes positifs ou nuls, décroissantes au sens large et telles que la série de terme général u_n^2 converge. $\mathcal{U}'^*$ désigne l'ensemble des suites non nulles de $\mathcal{U}'$. À toute suite de $\mathcal{U}'^*$, notée ici u, on associe le réel :

$$B(u) = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n^2}{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2}$$

$\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des réels $B(u)$ lorsque u décrit $\mathcal{U}'^*$.

Montrer que $\mathcal{B}$ est majoré; quelle est la borne supérieure de $\mathcal{B}$?